EXERCICE N°2 : | 30' | 5,5 points

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1): $z^2+(2+i)z+i=0$.

2°) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^3+(1+i)z^2-2z-i=0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :
$z^3+(1+i)z^2-2z-i=(z-1)(z^2+az+b)$.

c) En déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E).

3°) Dans Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ et $z_C=1$.

a) Mettre chacun des nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b) Montrer que les points A et B appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
Construire les points A , B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

4°) Soient les points E et F du plan d'affixes respectives $z_E=z_A-1$ et $z_F=z_B-1$.

a) Montrer que $OEAC$ et $OFBC$ sont des parallélogrammes.

b) Construire alors E et F.

c) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}+e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right)=e^{-i\frac{\pi}{6}}-1$ et $e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)=e^{i\frac{7\pi}{6}}-1$.

d) Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E_1)

EXERCICE N°3 : | 30' | 4 points

A- On considère l'équation différentielle : (E_λ): $y'=y^2+\lambda y$, avec $\lambda\in]0,1[$.

1°) Déterminer les solutions de l'équation différentielle : (E'_λ): $y'=-(\lambda y+1)$.

2°) Soit f et g deux fonctions définies et strictement positives sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ tel que : $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

a) Montrer que f est une solution de (E_λ) si et seulement si g est une solution de (E'_λ).

b) On suppose que $g(0)=1$.

Vérifier que pour tout $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$, $g(x)=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}$.

c) Montrer que $\ln(1+\lambda)>\frac{\lambda}{1+\lambda}$. En déduire que : $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda)>\frac{1}{2}$.

3°) Soit f la solution de (E_λ) tel que : $f(0)=1$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$; $f(x)=\frac{\lambda e^{\lambda x}}{\lambda+1-e^{\lambda x}}$.

c) Soit $\mathcal{A}(a)=\int_{-\lambda}^{0}f(x)dx$. Calculer $\mathcal{A}(a)$ et $\lim\limits_{a\to0^+}\mathcal{A}(a)$.

B- Soit X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1°) Déterminer λ sachant que : $p(5<X<10)=\frac{1}{4}$.

2°) Donner et représenter la fonction de répartition de X.